Revista Científica TRAJETÓRIA MULTICURSOS
REVISTA CIENTÍFICA TRAJETÓRIA MULTICURSOS
E-ISSN 2178 - 4485

# Uma proposta para introduzir o conceito de derivadas

Natasha Roberta Aguiar Lopes[1]
Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro[2]

**Resumo**

Este trabalho apresenta e analisa uma proposta de ensino para a introdução do estudo de derivadas através de suas aplicações. Tendo como objetivo auxiliar o aluno a formar um conceito amplo e significativo do processo de diferenciação para que possa utilizar estes conhecimentos para resolver problemas. A sequência didática utiliza-se da modelagem matemática como metodologia e fundamenta-se na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

**Palavras-chave:** derivadas - aprendizagem significativa - modelagem matemática - cálculo diferencial.

# A proposal to introduce the concept of derivatives

**Abstract**

This work presents and analyzes a teaching proposal for the introduction of derivatives of study through its applications. Aiming to help the student to form a broad and significant concept of the differentiation process so you can use this knowledge to solve problems. The didactic sequence is used mathematical modeling as a methodology and is based on Learning Theory of David Ausubel.

**Keywords:** derived – learning theory - mathematical modeling - differential calculus.

## Introdução

O trabalho propõe uma sequência didática para a introdução do estudo de derivadas através de suas aplicações, utilizando a modelagem matemática como metodologia de ensino, segundo as concepções de Barbosa(2001) e Sadovsky(2007). A sequência tem como objetivo contribuir para uma

[1] Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Cenecista de Osório (FACOS)
[2] Professor Orientador. Possui mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

construção sólida e completa do conceito de derivada, abrangendo aspectos intuitivos, algébricos e geométricos. Além disso, esperamos que o estudante seja capaz de resolver problemas que envolvam taxas de variação, compreendendo em que tipo de situações a diferenciação pode ser aplicada.

A escolha do tema se deve principalmente à experiência da autora deste trabalho como aluna de graduação, onde teve pouca oportunidade de estudar as aplicações dos conteúdos aprendidos nas disciplinas de cálculo em sala

de aula, e que, movida pela curiosidade e interesse, acabou por dedicar-se a estudos extraclasse sobre a temática. A partir disso, compreendeu o quanto as ferramentas do cálculo são úteis e relevantes em vários campos além da matemática. Podemos dizer que este trabalho é uma sugestão para melhorar, ao menos um pouco, a carência percebida pela autora em sua trajetória como estudante das disciplinas de cálculo.

Eis então o aspecto mais desafiador em relação a elaboração da sequência didática na qual se apoia este trabalho: Superar o paradigma de aprender a aplicação de um conteúdo de cálculo por último, somente depois de dominar conceitos e técnicas, muitas vezes deixando a abordagem prática para o final e com um tempo breve para ser trabalhada. Ora, reconhecemos que Cálculo não é uma disciplina fácil de ser ensinada, seus conteúdos trabalham com conceitos sofisticados e o tempo para estuda-los é pré-determinado e inflexível, deste modo, a sequência que iríamos propor precisaria ser dinâmica e instrutiva, mas também conveniente para ser usada no contexto de sala de aula sem comprometer o andamento curricular. A solução que encontramos foi trazer as aplicações da derivada para introduzir seu significado, ou melhor, construir seu significado, promovendo desde o início a conscientização do aluno acerca da importância do conteúdo.

Inicialmente, iremos promover uma breve análise sobre a disciplina de Cálculo, buscando compreender de que maneira concepções previamente adquiridas podem influenciar o estudante. Na sequência iremos falar sobre modelagem matemática, justificando nossa escolha por esta metodologia de ensino.

Em seguida, a apresentação da proposta virá acompanhada de nossas observações, obtidas durante a aplicação da mesma, configurando um estudo de caso, salientando aspectos importantes da prática e comentando resoluções propostas pelos alunos.

**O cálculo diferencial e integral como disciplina curricular**

O Cálculo Diferencial e Integral é uma importante ferramenta matemática, para Anton (2007) seu caráter analítico permite compreender o comportamento das mais diversas variáveis e prever situações que nos garantem maior domínio do nosso ambiente, seu estudo como disciplina curricular de nível superior não se limita apenas aos cursos de matemática, alcançando também outras áreas como a engenharia, a medicina, a economia e a física. Entretanto, mesmo sendo uma ferramenta tão útil e versátil, pesquisas como as de Barufi(1999), Rezende(2003) e Passos *et al* (2007) mostram um alto índice de reprovação em Cálculo em diversos cursosem várias universidades do pais. Estes índices negativos acabam estigmatizando a disciplina, de modo que muitos estudantes, mesmo antes de cursá- la, já a consideram difícil, gerando assim uma resistência ao seu estudo. Segundo Ryan(2009) a simples ideia de cursar a matéria é suficiente para causar receio nos alunos, tal fato também pôde ser observado pela autora deste trabalho durante seu curso de Licenciatura em Matemática, tanto quanto aluna (Cálculo I, II, III e Equações Diferenciais) como quanto monitora de Cálculo I, onde auxiliou o professor prestando assistência à turma durante as aulas.

Um dos fatores que pode explicar essa reação negativa é a pouca familiaridade que os universitários possuem com os conceitos estudados nesta disciplina, o currículo da Educação Básica não abrange nenhum conceito de Cálculo, deste modo, o primeiro contato no ensino superior tende a ser desagradável, por trazer uma grande quantidade de informações e conceitos até então desconhecidos.

Segundo David Ausubel (1980), pesquisador e teórico da Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, o conhecimento é uma construção

constante, baseada na assimilação de novos fatos à estrutura mentais já formadas, ou seja, um indivíduo só aprende quando acontecem interligações entre a informação nova é aquelas já conhecidas:

> Se eu tivesse de reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos. (AUSUBEL, 1980, folha de rosto)

Ausubel(1980) também classificou a aprendizagem em duas categorias: A Significativa e a Mecânica (ou memorística). Na primeira o significado que o aprendiz tem sobre a informação é alto, o número de conexões que consegue formar a partir de algo inédito é elevado, garantindo um aprendizado duradouro. Já na Aprendizagem Mecânica, o significado dado à informação é baixo, reflexo do pouco interesse e/ou do número limitado de ligações feitas pelo aprendiz, assim, a informação adquirida é anexada arbitrariamente na estrutura cognitiva e, em grande parte dos casos, logo esquecida.

Muitos estudantes de cálculo, acabam priorizando a Aprendizagem Mecânica, seja pela necessidade de aprovação na disciplina, seja pela dificuldade que encontram em seus estudos, focando sua atenção nos aspectos algébricos em detrimento aos conceituais. Rezende (2003, p. 32) critica essa *“prevalência da técnica sobre o significado”,* que muitas vezes caracteriza as aulas de Cálculo, argumentando que esta cobrança exagerada de aspectos técnicos desvirtua as ideias básicas da disciplina. A proposta apresentada neste trabalho considera este fator, e busca construir uma sequência didática para a introdução do ensino de Derivadas.

Considerando que o conceito de derivada, que é um dos mais importantes do cálculo, a proposta pretende que o estudante consiga relacionar o novo aprendizado com aquele que ele já possui, focando em entendimentos

conceituais, construindo assim uma Aprendizagem Significativa, que perdure, e o habilite a usar todo o potencial que esta ferramenta matemática oferece.

**Modelagem matemática**

A matemática possui um caráter de rigor científico elevado, destacando-se pela sua capacidade de auxiliar na explicação de fenômenos físicos através de modelos generalizados.

Sadovsky (2007) considera modelagem matemática o processo de analisar uma situação real e, em geral, complexa, extraindo dela uma determinada quantidade de variáveis relacionáveis e utilizando sistemas lógico-matemáticos para torná-la compreensível e até mesmo previsível. Em linguagem simplificada, podemos afirmar que modelar é o ato de expressar situações reais através da linguagem matemática.

No campo educacional, a Modelagem exerce um papel de mediação entre a situação problema a ser resolvida e as técnicas a serem usadas. Deste modo, compreendemos que modelar em sala de aula não deve ter como objetivo a criação de um modelo técnico-científico, mas servir como um processo de reflexão que permita ao estudante relacionar seu conhecimento teórico com a realidade. Assim como Barbosa (2001), defendemos a modelagem como uma metodologia que abrange aspectos além dos conhecimentos matemáticos, questionando a relevância e efetividade destes diante de contextos sociais:

> As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são "fins", mas sim "meios" para questionar a realidade vivida. (BARBOSA, 2001, p.4)

Esta perspectiva foi denominada por Barbosa como *corrente sócio-crítica,* e valoriza um conhecimento reflexivo, enquanto outras correntes como a pragmática e a científica se focam em conhecimentos matemáticos puros e tecnológicos.

Barbosa (2001,p.6) define modelagem como: "*Um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade."* Deste modo, considera além do trabalho do professor, o interesse do aluno como peça fundamental no bom desenvolvimento das aulas. A prática que iremos propor assume este caráter investigativo ao oferecer para o estudante problemas desafiadores, que exijam articulações entre seu conhecimento matemático com outras ciências, além de valorizar o debate em grupo e a síntese de ideias. Barbosa(2001) classifica três casos de abordagens didáticas que utilizam modelagem:

> 1) *Caso 1*. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. [...]
>
> 2) *Caso 2*. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução. [...]
>
> 3) *Caso 3*. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. É via do trabalho de projetos. (BARBOSA, 2001, P.8-9).

Nossa proposta irá se enquadrar no Caso 1, devido ao tempo breve previsto na realização da prática, pois seria inviável pedir que os estudantes coletassem dados. Por fim, justificamos nossa escolha por esta metodologia pelo fato de que as Derivadas possuem inúmeras aplicações nas ciências, onde é necessário saber interpretar problemas e transcrever situações usando modelos. É esta capacidade que o universitário deve desenvolver. Além disso, ao modelar criamos conhecimentos com nexos lógicos, para Sadovsky(2007) trata-se de formação e não apenas de informação:

> De fato, a matemática não funciona “separando” problemas, técnicas, representações, demonstrações; todas essas “zonas” convergem, de diferentes maneiras, na tarefa de modelagem[...] (SADOVSKY, 2007, p.29)
>
> [...] O fato de expressar uma realidade usando uma teoria coloca o estudante numa perspectiva de maior generalidade, o que lhe permite estimar o valor e o potencial do conhecimento. Aqui reside um aspecto fundamental do sentido formativo que não se deve perder de vista. Digamos também que a ideia de modelagem implica a ideia de produção de conhecimento, o que possibilita enfocar o aspecto central visado pelo ensino. (SADOVSKY, 2007, p.30)

A sequência didática, proposta neste trabalho, utilizará a modelagem para introduzir o estudo da diferenciação, através de problemas de aplicação que permitam ao estudante deduzir as soluções e o próprio conceito de Derivada.

## 2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA PRÁTICA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

A sequência foi aplicada na forma de oficina extraclasse para 5 alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Cenecista de Osório. Foi realizada em duas noites, perfazendo 8 horas/períodos de atividades, no segundo semestre de 2015.

Os alunos participantes cursavam a disciplina de cálculo I, onde já haviam estudado continuidade, porém ainda não haviam iniciado o estudo da diferenciação, considerando que na maioria das estruturas curriculares um conteúdo se segue ao outro, optamos por marcar o primeiro dia da oficina neste momento, pois assim a nossa proposta seria a responsável por introduzir o conceito de derivada para estes alunos, os quais, por nunca terem estudado o tema, produziriam um resultado fiel aos propósitos da pesquisa. O segundo encontro foi realizado na semana seguinte. Entre os dois dias da oficina, houve uma aula da disciplina de cálculo que abordou derivadas, porém, que não abrangia os conceitos vistos no segundo dia da nossa atividade.

A pesquisa assume então um caráter qualitativo, configurado em um estudo de caso, que, segundo Lüdke e André, se constitui como uma experimentação bem delimitada durante a pesquisa. A pesquisadora utiliza como principal ferramenta de análise as observações realizadas durante a prática, sempre considerando a importância de contextualizar ponderações,

tendo em vista a principal característica de um estudo de caso:

> "Os estudos de caso enfatizam a "interpretação em contexto". Um princípio básico desse tipo de estudo é que, para uma apreensão mais completa do objeto, é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. Assim, para compreender melhor uma manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas devem ser relacionadas à situação específica onde ocorrem ou à problemática a determinada a que estão ligadas." (LÜDKE e ANDRÉ,1986, *apud,* RIBEIRO, 2012)

**Oficina: aula 1**

As atividades preparadas para esta primeira aula tinham o objetivo de definir a derivada informalmente, preocupando-se em proporcionar aos alunos um entendimento conceitual do processo de diferenciação.

Vale destacar que, apesar da autora do trabalho estar se formando no mesmo curso que os alunos que participaram da pesquisa, o contato anterior entre eles era escasso. Por isso, antes de mais nada, foi promovido um momento de apresentações entre a professora (chamaremos a autora assim daqui por diante) e os alunos, no qual estes foram incentivados a serem participativos durante a aula, trazendo questionamentos e sugestões.

Em seguida, lemos o problema 1 (ver no apêndice), que pedia a velocidade média de um corpo em dois trechos de um percurso determinado por uma função s(t). Este problema foi escolhido para dar início a aula por tratar de um assunto que os alunos já viram no ensino médio, pois, seguindo as ideias de David Ausubel, buscamos iniciar por algo já familiar aos estudantes e que poderia servir de base para a nova aprendizagem.

A professora indagou o que os alunos entendiam por velocidade, estes afirmaram lembrarem de terem visto este conteúdo no ensino médio, mas não lembravam muito bem. Por isso, a professora explicou a fórmula indicando o que representava cada símbolo, e calculou a velocidade média do primeiro

trecho com os alunos, deixando que eles calculassem a velocidade média do segundo trecho sozinhos, algo que eles não encontraram dificuldades para fazer. Depois, os alunos tiveram que responder e justificar qual trecho tinha a velocidade média mais elevada. A maioria respondeu corretamente, porém somente o aluno A apresentou justificativa: *"No segundo trecho, pois ele [o corpo] andou mais no mesmo tempo".* Os outros alunos mostraram entender a resposta de A, porém, não podemos afirmar se chegaram ao entendimento sozinhos ou após ouvir a explicação do colega.

A professora, então, sugeriu uma interpretação geométrica do cálculo que fora feito, marcando $\Delta s$ e $\Delta t$ no gráfico e perguntando se o desenho formado era conhecido aos alunos. Eles responderam que tinha um ângulo reto, portanto era um triângulo retângulo. Desenhou então uma reta secante a dois pontos no gráfico para fechar o triângulo e indagou o que havia sido feito para calcular a velocidade média, reconhecendo que $\Delta s$ e $\Delta t$ eram catetos de um triângulo retângulo.

O Aluno E disse que era "seno, cosseno ou tangente", porém não lembrou a relação exata. Também foi possível perceber que os alunos tinham dificuldade para diferenciar o cateto adjacente do cateto oposto.

A professora explicou qual cateto era adjacente e qual era oposto, mostrando a relação trigonométrica que resultava na inclinação da reta secante (valor da tangente do ângulo formado pela reta secante e o eixo x). Para comprovar a veracidade do que falava, pediu para que os alunos medissem os ângulos formados pela reta secante em seus desenhos com um transferidor e depois descobrissem a tangente deste ângulo na calculadora. Todos conseguiram encontrar um ângulo cujo valor aproximado da tangente correspondia com o da velocidade média encontrada anteriormente no intervalo. Concluímos assim a definição de inclinação da reta secante e sua relação com velocidade média.

Até este momento nada poderia ter sido considerado novo para os alunos, uma vez que todos os conhecimentos utilizados estão presentes na maioria dos currículos de educação básica. Acreditamos que o problema 1 teve justamente a função de mostrar que o que viria a seguir não era algo tão distante do que eles já conheciam, abaixo a transcrição do questionamento seguinte proposto pela professora e seu debate com os alunos:

Professora: “E se quisermos calcular a velocidade no instante t=2 segundos?”
Aluno C: “Dividir 1 (espaço) por 2 (tempo)”.

Professora: “Não podemos fazer isso, pois a fórmula Δs/Δt vem diretamente do pressuposto da existência de um intervalo, ou seja, você precisaria de um Δs (s1-s0) e um Δt(t1-t0). Neste caso precisamos trabalhar com a ideia de intervalo para se adequar à fórmula, mas ele deve ser tão pequeno que poderemos o considerar nulo. Qual ferramenta do cálculo podemos utilizar para isso?”

Os alunos pensaram um pouco, foram C e E que sugeriram as respostas que se complementam:

*Aluno C: “Fazemos o intervalo tender*

*a zero" Aluno E: "Usamos limite"*

Esta dedução realizada pelos alunos era justamente onde queríamos chegar, a síntese que almejávamos, aquilo que propôs Sadovsky(2007) ao falar sobre modelagem matemática e ao relacionar com a capacidade de matematizar uma situação problema. A partir da resposta dos alunos, encontramos a velocidade instantânea no instante t=2s, além de uma fórmula genérica para fornecer as velocidades em qualquer ponto, ou seja, a própria derivada da função s(t).

Realizamos então uma interpretação gráfica da derivada, neste momento, alguns alunos parecerem confusos ao relacionar a álgebra do limite com a geometria de aproximar dois pontos fazendo o intervalo $\Delta t$ tender a zero, "transformando" a reta secante em uma reta tangente. Este foi um momento delicado da aula, pois era exatamente a explicação do significado da derivada, e só foi possível seguir adiante depois que a professora reforçou várias vezes o conceito e explicou sobre taxas de variação média e instantânea.

O problema 2 trabalhava com aceleração, mas sem deixar explícito que aceleração era derivada da velocidade: *"Considere um corpo abandonado verticalmente em queda livre que demora 6 segundos para atingir o solo. Um observador registrou as seguintes velocidades (desprezando a resistência do ar) deste corpo durante a queda.*

| *TEMPO (Em segundos)* | *VELOCIDADE (Em metros por segundo)* |
|---|---|
| *0* | *0* |
| *1* | *10* |
| *2* | *20* |
| *3* | *30* |
| *4* | *40* |
| *5* | *50* |
| *6* | *60* |

A. Qual função o observador pode usar para modelar o comportamento do objeto?

B. Qual a aceleração do objeto no instante t=4 s ?

C. Se o objeto, ao invés de abandonado, fosse lançado para baixo com uma velocidade de 5 m/s, o que aconteceria com a aceleração?"

Foi no item A) que os alunos tiveram mais dificuldade, novamente em algo que não era relacionado ao cálculo infinitesimal, na capacidade de modelar funções. Para ajudar os alunos, a professora comentou sobre variáveis dependentes e independentes, e estes concluíram que a função seria uma v(t). Depois foi debatido sobre o significado da aceleração, e o item B) foi resolvido sem dificuldades, uma vez que os alunos entenderam que a(t)=v'(t). No item *c*, apenas o aluno B respondeu: "Não acontece nada, permanece igual", a professora então explicou o porquê deste comportamento, comentando sobre a aceleração da gravidade e também demonstrando algebricamente.

O problema 3 era bastante similar ao 2, mas não listava em seus itens o "passo-a- passo" do que deveria ser feito. No entanto, os alunos entenderam que a primeira coisa que deveriam fazer era encontrar uma função para representar os dados da tabela, e o resto foi resolvido sem dificuldades. No fim indagamos por que aquela questão (3) resultara em uma derivada que tinha a forma de uma função linear e o problema anterior (2) resultava em uma derivada constante. Os alunos repararam que a própria variação de velocidade no problema 2 era constante (10 em 10) enquanto no problema 3 não tinha este comportamento linear, a professora concluiu o raciocínio acrescentando que a velocidade não tinha variação constante conforme o tempo avançava, ou seja, a derivada (aceleração) também não poderia ser constante.

Os problemas 2 e 3 foram importantes para esclarecer aspectos que o problema 1 não pôde. Através das tabelas apresentadas, os alunos puderam compreender o que significava uma taxa de variação.

No fim da aula, a professora perguntou como os alunos avaliavam este primeiro contato com o conteúdo: 3 afirmaram que “mediano” e 2 que “bom”. Não consideramos estes resultados ruins. Se levarmos em conta o número de conceitos trabalhados, e não apenas os matemáticos relacionados com trigonometria, álgebra, geometria e cálculo, mas também os da física

(velocidade e aceleração), e das competências exigidas durante a resolução dos problemas, podemos dizer que a aula exigiu bastante raciocínio. Pelo fato de terem conseguido articular tantos conceitos em resoluções coesas, o rendimento foi satisfatório. Além disso, esta foi a primeira aula de um conteúdo novo, e não podemos esperar que os alunos saiam dominando todos os conceitos e ideias apresentadas. Acreditamos que nossos objetivos neste dia foram alcançados.

**Oficina: aula 2**

Neste segundo, e último, dia, a aula começou com uma apresentação de slides onde a professora definiu a derivada formalmente, além de explicar sobre derivadas de ordem superior e as representações da derivada. Foram usados como exemplos os problemas da aula anterior, afinal, a aceleração nada mais é do que a derivada de segunda ordem da função horário das posições. Depois, utilizando o software Geogebra[2], foram reiterados alguns conceitos anteriormente apresentados, além de explicar os casos específicos de diferenciação para função constante e função linear. A professora também falou sobre pontos máximos e mínimos da função, mas sem se preocupar em definir formalmente, dando especial ênfase no vértice de uma função quadrática.

Pelos minutos iniciais foi possível perceber que os alunos estavam bem mais à vontade na aula, participando com mais entusiasmo e questionando com mais frequência. Na sequência foi entregue aos alunos uma nova lista com situações- problemas, neste dia, diferente do primeiro, a professora percebeu que os alunos estavam mais autônomos e confiantes para resolver as questões, trocando ideias e discutindo sobre o conteúdo.

No primeiro problema, que indagava sobre a variação do Produto Interno Bruto de um país em um intervalo de tempo, os alunos apresentaram uma dificuldade inicial ao interpretar o item A), pois, em um primeiro momento, não compreenderam o que deveria ser feito. Pensaram que a derivada deveria ser usada, porém, após a professora chamar a atenção de que a questão falava em variação média, ou seja, se referia a um intervalo e não a um instante, entenderam que deveriam encontrar a inclinação da reta secante aos pontos. No item B), perceberam que deveriam derivar a função e o resolveram sem dificuldades. Embora a professora tenha dito que os alunos poderiam usar o Geogebra para calcular as derivadas, eles conseguiram derivar sem usar o programa, pois concluíram sozinhos a técnica de derivação ao ver o padrão em exemplos mostrados pela professora. Aqui gostaríamos de abrir um parêntese para destacar o quanto a dedução da técnica para calcular derivadas de potências de x e de somas/diferenças foi interessante, até porque era algo que não esperávamos e se revelou uma grata surpresa.

Para finalizar o problema 1 a professora questionou o significado das respostas dos itens A) e B), pois bem como defende Barbosa (2001) naquela que chama de corrente sócio-crítica a atividade de modelar deve ser reflexiva, ou seja, além de encontrar um resultado numérico, o aluno precisa entender o significado que o número estabelece no contexto. Os alunos conseguiam compreender que no item *a* a variação era média (15 bilhões de dólares por

Revista Científica TRAJETÓRIA MULTICURSOS
REVISTA CIENTÍFICA TRAJETÓRIA MULTICURSOS
E-ISSN 2178 - 4485

ano), ou seja, um balanço do período de 10 anos, enquanto no item B) a variação era de um único ano (25 bilhões de dólares por ano), ou seja, em relação à média do período, a variação do PIB naquele ano foi elevada.

Os problemas 2 e 3 eram parecidos em sua essência, e trabalhavam com a ideia de máximos e mínimos, especificamente com o vértice de funções quadráticas. Os alunos apresentaram um pouco de dificuldade para entender quando era pedido o x do vértice e/ou o y do vértice, mas com a ajuda da professora conseguiram resolver ambos os problemas utilizando seus conhecimentos sobre derivadas.

Para finalizar a aula e também a sequência didática, foi realizado um questionário para verificar o conhecimento dos alunos. As respostas das 5 questões objetivas foram extremamente satisfatórias, com 100% de acertos nas questões 1, 2, 4 e 5. E, somente com um aluno errando a questão 3.

A questão 6 era a única dissertativa, e pedia a explicação da fórmula

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

. Abaixo as respostas sugeridas pelos alunos:

Aluno A:

a fórmula é a derivada da função f(x), em que usamos para achar a taxa de variação da derivada, ou seja, o limite do ponto onde ela se aproxima bem próximo do ponto inicial percebendo ser um único ponto

Aluno B:

o que f(x1) + f(x0) é uma variação de uma derivada, onde achamos a variação e inclinação de uma reta tg. onde quanto mais um ponto se aproxima do ponto f(x).
É a taxa de variação instantânea

Aluno C:

* É a fórmula que indica a taxa de variação instantânea
* É feita pela divisão da subtração dos pontos extremos do intervalo

Aluno D:

• Fórmula onde é usada para achar a taxa de variação instantânea

Aluno E:

Significado = A fórmula é usada para achar a taxa de variação instantânea.
Explicação: A reta secante tem um limite, ele se aproxima de um número, quando $x_1 \to x_0$ (ele se aproxima muito de um número) o número encontrado (tende) será o ponto da tangente na reta,

Percebemos que as respostas diferem bastante, entretanto, todas parecem entender que a fórmula se refere a uma taxa de variação instantânea (derivada). Talvez a maior dificuldade não esteja no aspecto conceitual, mas no representativo, ou seja, descrever com palavras uma ideia matemática.

Entretanto, ficamos bastante felizes com o conhecimento que os alunos mostraram no questionário.

**Considerações finais**

Quando nos voltamos para o que foi proposto, uma sequência didática que auxiliasse em uma construção ampla do conceito de derivada através de situações problemas que mostrassem algumas aplicações do conteúdo, vemos que alcançamos sucesso em nossa proposta, algo visível nas respostas do questionário final. Evidentemente nem tudo saiu como o planejado inicialmente, e na verdade nunca esperamos que fosse assim, algumas dificuldades surgiram ao longo dos encontros, mas também surpresas positivas.

De fato, a atividade docente tem esta habilidade de surpreender. E o professor deve sempre ter uma postura incrédula em relação à própria prática. Reconhecendo isto, destacamos que apesar dos resultados positivos relatados aqui neste trabalho, entendemos que ele não foi perfeito, existem pontos que podem ser melhorados, talvez fosse interessante apresentar a definição formal de derivada logo após o problema 1 da primeira aula, ou até mesmo trabalhar com outras aplicações. Além disso, nossa amostra de alunos, apenas 5, pode não ser a representação mais fiel de uma turma inteira de cálculo. Porém, a experiência que relatamos pode ajudar e servir de inspiração para a elaboração de sequências didáticas ainda mais interessantes.

Percebemos que a modelagem matemática como defendida por Barbosa e Sadovsky, se mostrou uma metodologia adequada às aulas, uma vez que sempre buscamos estimular o raciocínio lógico e reflexivo no aluno, e lhes permitimos articular diferentes conhecimentos em suas resoluções.

Talvez a consideração mais difícil e complexa seja em relação a teoria de David Ausubel, afinal, como decidir se a aprendizagem proporcionada pelas aulas foi significativa? Obviamente que para isto precisamos nos desvincular do senso comum da palavra “significativa” e nos lembrar que dentro da teoria de Ausubel esta palavra está intimamente ligada com o grau de conexões que o indivíduo consegue formar entre uma informação nova e uma já conhecida. Além disso, é errado afirmar que algo é ou não significativo, o que podemos

afirmar é que algo é *mais* ou *menos* significativo e *mais* ou *menos* mecânico. Assim, podemos dizer que a sequência que propomos foi *mais* significativa e *menos* mecânica por trazer maior dinamismo para a aprendizagem, trabalhando com exemplos e aplicações. Proporcionamos ao aluno a chance de relacionar a derivada (conhecimento novo) com situações que já conhecia tais como a física, e que convive em seu cotidiano como o exemplo que calculamos a variação do PIB, esta ampliação do horizonte de aprendizagem para além do puramente matemático é, na nossa opinião, de imensa valia para o aluno.

Apesar de afirmamos a importância de trabalhar as aplicações da derivada para tornar o ensino menos mecânico, não desmerecemos nenhuma outra metodologia. Porém sugestões sinceras e bem-intencionadas são sempre bem-vindas, e este trabalho é acima de tudo uma sugestão bem-intencionada de alguém que admira todo o potencial que o estudo de cálculo pode trazer aos estudantes.

## Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8ª. ed. São Paulo: Artmed, v. I, 2007.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições Para o Debate Teórico**, Rio de Janeiro, 24, 2001. Disponivel em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_ barbosa.pdf>. Acesso em: 19 Setembro 2015.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**, São Paulo, 1999. Disponivel em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/pt- br.php>. Acesso em: 18 Setembro 2015.